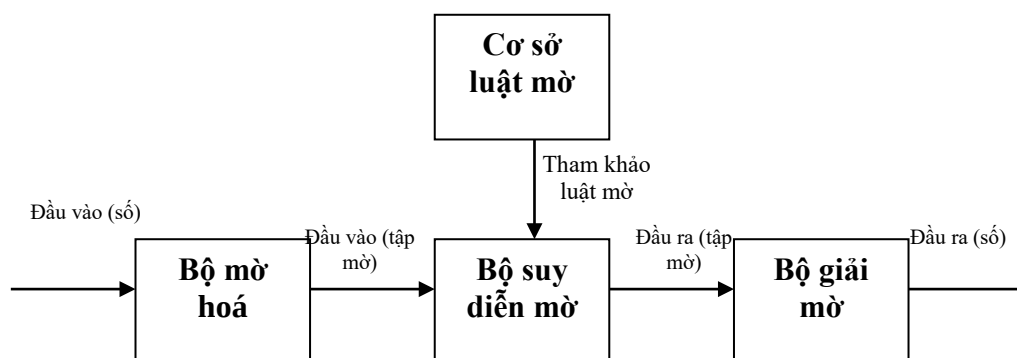


CHƯƠNG I. HỆ MỜ

KIẾN TRÚC CỦA HỆ MỜ TỔNG QUÁT

Một hệ mờ tiêu biểu có kiến trúc như hình vẽ



Thành phần trung tâm của hệ mờ là cơ sở luật mờ (fuzzy rule base). Cơ sở luật mờ bao gồm các luật mờ if-then biểu diễn tri thức của chuyên gia trong lĩnh vực nào đó. Trong trường hợp một hệ điều khiển mờ cụ thể thì cơ sở luật mờ chính là tri thức và kinh nghiệm của các chuyên gia trong việc điều khiển khi chưa áp dụng hệ mờ.

Thành phần quan trọng kế tiếp là bộ suy diễn mờ (fuzzy inference engine). Nhiệm vụ của bộ phận này là kết hợp các luật trong cơ sở luật mờ, áp dụng vào tập mờ đầu vào theo các phương pháp suy diễn mờ để xác định tập mờ đầu ra.

Dữ liệu đầu vào của hệ điều khiển mờ là các tín hiệu do các bộ phận cảm biến môi trường cung cấp sau khi đã số hoá nên có tính chất rõ (khái niệm rõ ở đây có nghĩa là các tín hiệu đó không phải là các tập mờ, chứ không có nghĩa là các tín hiệu không có nhiều). Vì vậy cần phải có bộ mờ hoá (fuzzier) để chuyển các dữ liệu số đầu vào thành các tập mờ để bộ suy diễn mờ có thể thao tác được.

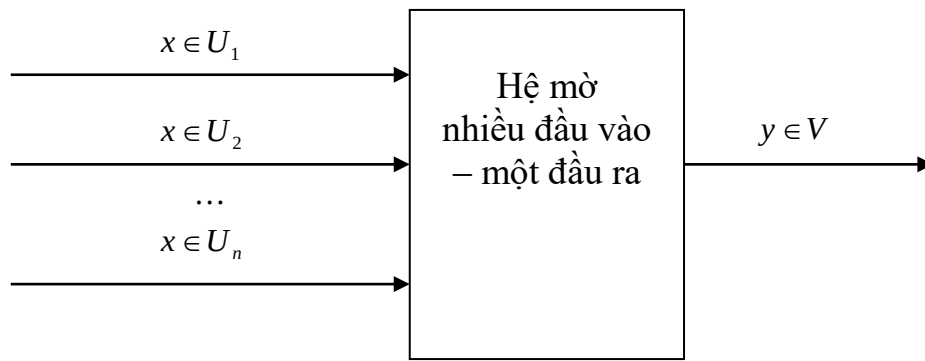
Dữ liệu đầu ra của bộ suy diễn mờ ở dạng các tập mờ sẽ được bộ giải mờ (defuzzier) chuyển thành tín hiệu số trước khi truyền đến các cơ quan chấp hành như tay máy, công tắc, van điều khiển,...

Do các dữ liệu đầu vào và đầu ra được số hoá nên ta chỉ cần xem xét các hệ mờ làm việc với các biến số. Trường hợp tổng quát, hệ mờ nhận một vector n chiều ở đầu vào và cho ra một vector m chiều ở đầu ra. Hệ mờ như thế được gọi là hệ mờ nhiều đầu vào – nhiều đầu ra (MIMO). Nếu m bằng 1, ta có hệ mờ nhiều đầu vào – một đầu ra (MISO). Một hệ mờ nhiều đầu vào – nhiều đầu ra có thể phân tích thành nhiều hệ mờ nhiều đầu vào – một đầu ra. Do đó ta chỉ cần tìm hiểu kỹ về hệ mờ nhiều đầu vào – một đầu ra với các biến số. Khi chỉ nói về hệ mờ nhiều – một thì ta sẽ ngầm hiểu là một hệ mờ nhiều đầu vào – một đầu ra với các biến số

Ký hiệu $U = \prod_{i=1}^n U_i \subset R^n, V \subset R$, trong đó U_i là miền xác định của các biến vào

$i, i=1..n$ và V là miền giá trị của biến ra y , ta có mô hình hệ mờ nhiều đầu vào – một đầu ra như hình vẽ

Logic mờ, số mờ và hệ mờ



Các mục kế tiếp sẽ mô tả kỹ hơn về các bộ phận chức năng của hệ mờ.

CƠ SỞ LUẬT MỜ

Cơ sở luật mờ của hệ mờ n đầu vào – một đầu ra gồm m luật if-then mờ có dạng:

If “ x_1 là A_{k1} ” và “ x_2 là A_{k2} ” và ... và “ x_n là A_{kn} ” **then** “ y là B_k ”, $k=1..m$ (1)

Trong đó k là chỉ số của luật (luật thứ k trong tập luật), x_i là các biến đầu vào, A_{ki} là các tập mờ trên U_i ($i=1..n$), y là biến đầu ra và B_k là tập mờ trên V ($k=1..m$)

Các luật mờ dạng (1) được gọi là các luật **if-then** mờ chuẩn tắc. Các luật mờ không chuẩn tắc có thể biến đổi để đưa về dạng chuẩn tắc tương đương.

Có nhiều phương pháp để xác định các luật mờ để đưa vào cơ sở luật mờ. Các phương pháp thông dụng là nhờ các chuyên gia trong lĩnh vực áp dụng, hoặc từ quan sát, thực nghiệm thống kê để có được các tập dữ liệu mẫu đầu vào và ra tương ứng, từ đó dùng các kỹ thuật khai mỏ dữ liệu để rút ra các luật.

BỘ SUY DIỄN MỜ

Chúng ta sẽ nghiên cứu phương pháp thiết kế bộ suy diễn trong trường hợp cơ sở luật mờ gồm m luật if-then mờ chuẩn tắc, nhiều đầu vào và một đầu ra (MISO).

Các luật if-then có thể được áp dụng bằng các công thức tổng quát như đã trình bày trong chương logic mờ nhưng trong thực tế thì thường được tính bằng công thức Mamdani max-min hoặc max-tích (max-prod). Chúng ta sẽ xem xét kỹ kiến trúc bộ suy diễn mờ sử dụng phương pháp suy diễn max-min. Khi chuyển qua phương pháp suy diễn max-tích thì chỉ cần thay min bằng phép nhân trong các công thức.

Cho A , A' , B lần lượt là các tập mờ trên vũ trụ X , X , Y . Luật **if A then B** được thể hiện như một quan hệ mờ $R=A \times B$ trên $X \times Y$. Khi đó tập mờ B' suy ra từ A' được xác định bởi:

$$\mu_{B'}(y) = \max \{ \min [\mu_{A'}(x), \mu_R(x,y)] \} \quad (*)$$

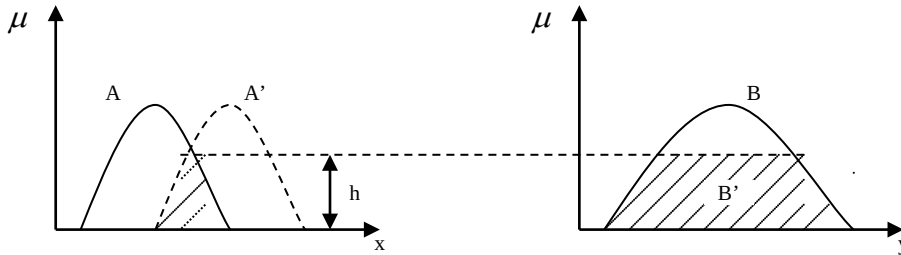
Trường hợp một đầu vào và một luật

$$\text{Ta có } \mu_{B'}(y) = \max_x \{ \min [\mu_{A'}(x), \mu_R(x,y)] \}$$

Logic mờ, số mờ và hệ mờ

$$\begin{aligned}
 &= \max_x \{ \min [\mu_{A'}(x), \mu_A(x), \mu_B(y)] \} \\
 &= \min \{ \max_x (\min [\mu_{A'}(x), \mu_A(x)]), \mu_B(y) \} \\
 &= \min \{ \max_x \mu_{A' \cap A}(x), \mu_B(y) \} \\
 &= \min \{ h_{A' \cap A}, \mu_B(y) \}
 \end{aligned}$$

Trong đó $h_{A' \cap A}$ là độ cao của tập mờ $A' \cap A$



Trường hợp hai đầu vào và một luật

Đây là trường hợp luật được phát biểu "Nếu x là A và y là B thì z là C".

Luật: Nếu x là A và y là B thì z là C

Sự kiện: x là A' và y là B'

Kết luận: z là C'

Luật mờ với điều kiện có 2 mệnh đề như trên có thể biểu diễn ở dạng $A \times B \Rightarrow C$.
Suy luận tương tự trường hợp một đầu vào và một luật ta có:

$$\mu_{C'}(z) = \min \{ h_{A' \times B' \cap A \times B}, \mu_C(z) \}$$

Mà $A' \times B' \cap A \times B = (A' \cap A) \times (B' \cap B)$ nên $h_{A' \times B' \cap A \times B} = \min \{ h_{A' \cap A}, h_{B' \cap B} \}$

Vậy $\mu_{C'}(z) = \min \{ h_{A' \cap A}, h_{B' \cap B}, \mu_C(z) \}$

Suy rộng ra cho trường hợp nhiều đầu vào $A_i, i=1..n$ và một luật

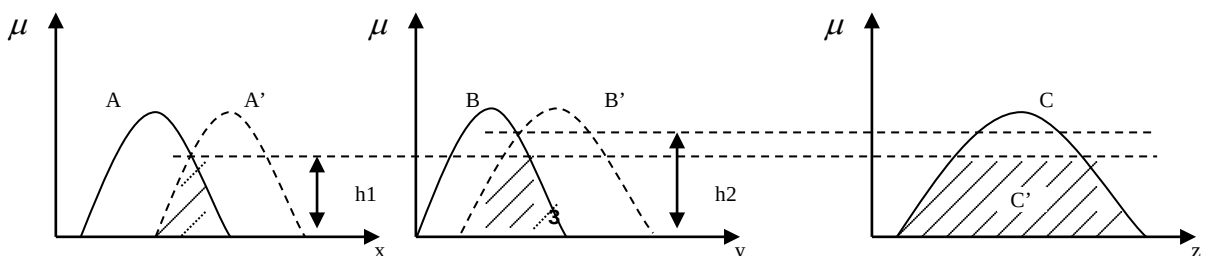
Luật: Nếu x_1 là A_1 và x_2 là A_2 và... và x_n là A_n thì z là C

Sự kiện: x_1 là A_1' và x_2 là A_2' và... và x_n là A_n'

Kết luận: z là C'

$$\mu_{C'}(z) = \min \{ (\min_{i=1..n} h_{A_i' \cap A_i}), \mu_C(z) \}$$

Minh họa:



Trường hợp nhiều đầu vào và nhiều luật

Trong trường hợp nhiều đầu vào và nhiều luật, ta tính kết quả đầu ra cho từng luật sau đó kết quả của hệ sẽ là các phép giao hoặc hợp các kết quả riêng đó tùy theo bản chất của hệ là hội hay tuyển các luật.

Nếu trong một luật có dạng “Nếu x là A hoặc y là B thì z là C” ta tách thành 2 luật riêng biệt “Nếu x là A thì z là C” và “Nếu y là B thì z là C” để tính.

BỘ MỜ HOÁ

Mờ hoá là quá trình biến đổi một vector $x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U \subseteq R^n$ thành một tập mờ A' trên U . A' sẽ là đầu vào cho bộ suy diễn mờ. Mờ hoá phải thoả các tiêu chuẩn sau:

- Điểm dữ liệu x phải có độ thuộc cao vào A'
- Vector x thu nhận từ môi trường ngoài có thể sai lệch do nhiễu nên A' phải phản ánh được tính gần đúng của dữ liệu thực
- Hiệu quả tính toán: đơn giản cho các tính toán trong bộ suy diễn.

Sau đây là một số phương pháp mờ hoá thông dụng

Mờ hoá đơn trị

Mỗi điểm dữ liệu x được xem như một tập mờ đơn trị tức là tập mờ A có hàm thuộc xác định như sau:

$$\mu_{A'}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u = x \\ 0 & \text{if } u \neq x \end{cases}$$

Mờ hoá Gaus

Mỗi giá trị x_i được biểu diễn thành một số mờ A'_i . Tập A' là tích đề-các của các A'_i

$$\mu_{A'_i}(u_i) = e^{-\left(\frac{u_i - x_i}{a_i}\right)^2}$$

Mờ hoá tam giác

Mỗi giá trị x_i được biểu diễn thành một số mờ A'_i . Tập A' là tích đề-các của các A'_i

$$\mu_{A'_i}(u_i) = \begin{cases} 1 - \frac{|u_i - x_i|}{b_i} & \text{if } |u_i - x_i| \leq b_i \\ 0 & \text{if } |u_i - x_i| > b_i \end{cases}$$

BỘ GIẢI MỜ

Giải mờ (hay còn gọi là khử mờ) là quá trình xác định một điểm y từ một tập mờ trên B' trên V . (B' là đầu ra của bộ suy diễn mờ). Giải mờ phải thỏa các tiêu chuẩn sau:

- Điểm y là đại diện tốt nhất cho B' . Trực quan y là điểm có độ thuộc cao nhất vào B' và ở trung tâm tập giá đỡ của B' .
- Hiệu quả tính toán nhanh
- Tính liên tục. Khi B' thay đổi ít thì y cũng thay đổi ít

Sau đây là một số phương pháp giải mờ thông dụng

Phương pháp lấy max

Phương pháp này chọn y là điểm có độ thuộc cao nhất vào B'

$$\text{Xác định tập rõ } H = \left\{ y \in V \mid \mu_{B'}(y) = \sup_{v \in V} \mu_{B'}(v) \right\}$$

Sau đó có thể chọn y trong H như sau:

- y bất kỳ
- y là điểm cực biên (lớn nhất hoặc nhỏ nhất)
- y là trung điểm của H

Phương pháp lấy trọng tâm

Phương pháp này chọn y là điểm trọng tâm của tập B'

$$y = \frac{\int v \mu_{B'}(v) dv}{\int \mu_{B'}(v) dv}$$

Phương pháp lấy trung bình tâm

Vì B' thường là hợp hoặc giao của m tập mờ thành phần do vậy ta có thể tính gần đúng giá trị y là bình quân có trọng số của tâm m tập mờ thành phần. Giả sử x_i và h_i là tâm và độ cao của tập mờ thành phần B'_i ta có:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^m x_i \cdot h_i}{\sum_{i=1}^m h_i}$$

Phương pháp này được ứng dụng nhiều nhất vì kết quả đầu ra y có xét đến ảnh hưởng của tất cả các luật tương tự như phương pháp trọng tâm nhưng độ phức tạp tính toán ít hơn.

HỆ MỜ LÀ MỘT HỆ XÁP XỈ VẠN NĂNG

Các hệ mờ đã được ứng dụng thành công trong rất nhiều lĩnh vực, đặc biệt là trong điều khiển các quá trình công nghiệp và trong hệ chuyên gia. Một câu hỏi đặt ra là tại sao hệ mờ lại có phạm vi ứng dụng rộng lớn và hiệu quả như thế? Một cách trực quan chúng ta có thể giải thích rằng đó là vì các hệ mờ có thể sử dụng tri thức của các

chuyên gia được phát biểu trong ngôn ngữ tự nhiên nên có bản chất mờ. Lý do nữa là vì các số liệu thu nhận được từ môi trường là xấp xỉ, không chính xác nên cũng có bản chất mờ.

Về mặt lý thuyết, định lý quan trọng sau đây đã được chứng minh, đó là nền tảng vững chắc cho hệ mờ nhiều đầu vào – một đầu ra (MISO). Mà hệ mờ nhiều đầu vào – một đầu ra có thể coi như đơn vị cấu thành của hệ mờ nhiều đầu vào – nhiều đầu ra (MIMO).

Một hệ mờ nhiều đầu vào – một đầu ra xác định một hàm thực n biến $y = F(x)$, ứng với mỗi vector đầu vào $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ với giá trị đầu ra $y \in R$. Ta gọi là F là số hàm đặc trưng của hệ mờ này.

Định lý: Giả sử U là tập compact trong R^n , $V \subset R$, f là hàm $f: U \rightarrow V$. Nếu f liên tục thì tồn tại một hệ mờ sao cho hàm F đặc trưng của nó xấp xỉ f với độ chính xác tùy ý cho trước. Tức là

$$\sup_{x \in U} |F(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Chúng minh định lý trên có thể tham khảo trong các sách sau:

- Lee C. S. G. and Lin C. T., **Neural Fuzzy Systems, A neuro – Fuzzy Synergism to Intelligent System**, Prentice – Hall, 1996
- Wang L. X. A course in **Fuzzy Systems and Control**, Prentice – Hall, 1997

CHƯƠNG II. PHƯƠNG PHÁP THIẾT KẾ HỆ ĐIỀU KHIỂN MỜ TỪ TẬP DỮ LIỆU VÀO VÀ RA ĐẶT VẤN ĐỀ

Một hệ thống điều kiện mờ có mục đích mô phỏng suy nghĩ của con người khi điều khiển một đối tượng nào đó. Nhìn chung, hiểu biết của con người gồm 2 loại: hiểu biết rõ (conscious knowledge) và hiểu biết chưa rõ (subconscious knowledge). Hiểu biết rõ là hiểu biết có thể diễn đạt bằng ngôn ngữ, công thức, thuật toán, ... Đó chính là tri giác. Còn hiểu biết chưa rõ là hiểu biết mà con người biết cách áp dụng, thực hiện đúng nhưng không diễn đạt chính xác được. Chẳng hạn kiến thức xử lý bóng của một cầu thủ giỏi. Anh ta hầu như không thể giải thích được là với một đường bóng khó, làm thế nào để đưa bóng vào lưới mặc dù đó là điều mà anh ta thực hiện thường xuyên. Hiểu biết chưa rõ thường được tích lũy từ kinh nghiệm và bản chất là cảm giác. Để đưa được kiến thức hiểu biết chưa rõ vào hệ điều khiển mờ thì ta cần phải lượng hóa các điều kiện đầu vào và đầu ra tạo thành các tập dữ liệu vào-ra. Sau đó thiết kế hệ thống dựa trên cơ sở tập dữ liệu đó. Đây cũng là một trong những phương pháp thu nhận tri thức từ dữ liệu thô.

Có nhiều phương pháp xác định hệ điều kiện mờ từ tập dữ liệu vào-ra nhưng chúng ta chỉ tìm hiểu phương pháp lập bảng dữ liệu vào

THIẾT KẾ HỆ ĐIỀU KIỆN MỜ BẰNG BẢNG DỮ LIỆU VÀO

Giả sử ta có tập các cặp dữ liệu vào-ra (x_i, y_i) $i=1..N$.

Trong đó $x_i \in [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] \subset R^k$ và $y_i \in [c_1, c_2] \subset R$

Các bước để xây dựng một hệ điều kiện mờ như sau:

Bước 1: Xác định tất cả các biến vào và ra

Bước 2: Xác định miền giá trị biến vào và ra và các hàm thuộc của chúng

- Phân chia miền giá trị của các biến sao cho có ý nghĩa và phù hợp thực tế. Mỗi miền sẽ được đại diện bởi một tập mờ.
- Với mỗi tập mờ ở trên, xác định hàm thuộc của chúng. Các hàm dạng tam giác và hình thang thường được chọn

Bước 3: Xác định các luật mờ

- Xét từng cặp dữ liệu vào-ra để tạo ra từng luật riêng biệt. Với mỗi cặp dữ liệu vào-ra (x, y) ta cho rằng có một luật $A \Rightarrow B$ nếu $\mu_A(x)$ là giá trị lớn nhất trong các giá trị hàm thuộc của các tập mờ đầu vào đối với x và $\mu_B(y)$ là giá trị lớn nhất trong các giá trị hàm thuộc của các tập mờ đầu ra đối với y .
- Xác định trọng số của từng luật. Nếu có 2 luật mâu thuẫn thì chọn luật có trọng số cao hơn
- Các luật đã chọn được đưa vào bảng luật. Ví dụ: bảng luật của một hệ điều khiển máy bơm nước

	H.Đầy	H.Lung	H.Cạn
N.Cao	0	B.Vừa	B.Lâu
N.Vừa	0	B.Vừa	B.HơiLâu
N.Ít	0	0	0

Bước 4: Chọn phương pháp suy diễn

Để tính hàm thuộc đầu ra thì có nhiều phương pháp như đã trình bày ở chương logic mờ, nhưng vì lý do dễ cài đặt và tốc độ tính toán nhanh nên phương pháp max-min, max-prod, sum-min, sum-prod thường được chọn.

Bước 5: Chọn phương pháp giải mờ

Phương pháp trọng tâm hoặc trung bình tâm thường được chọn vì lý do dễ cài đặt và tốc độ tính toán nhanh.

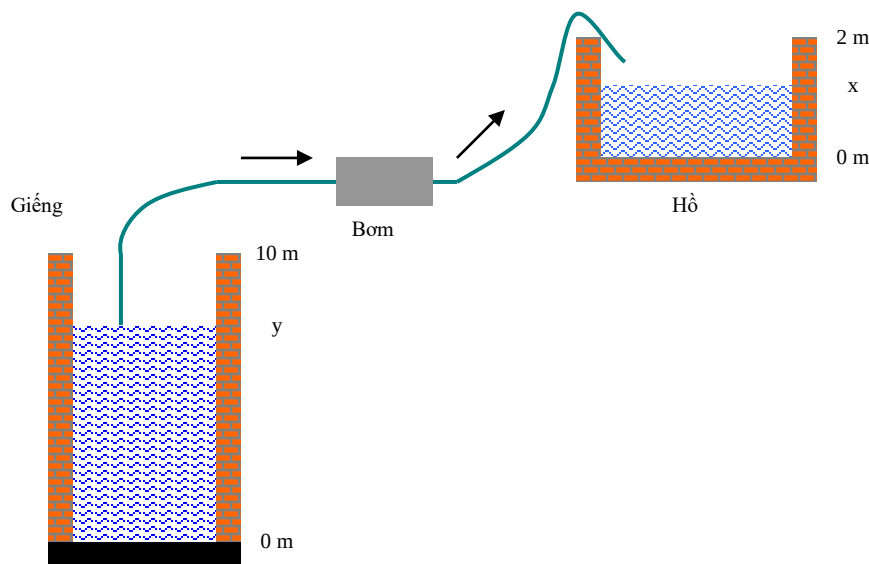
Bước 6: Tối ưu hóa hệ luật và thử nghiệm mô hình

Hệ thống được cho chạy thử và so sánh với các kết quả có được bởi chuyên gia. Nếu kết quả chưa phù hợp thì cần hiệu chỉnh các hàm thuộc và các luật cũng như phương pháp suy diễn và giải mờ

CHƯƠNG III. MINH HOẠ HỆ MỜ: HỆ ĐIỀU KHIỂN MÁY BƠM NƯỚC TỰ ĐỘNG

Để minh họa cho lý thuyết logic mờ và hệ điều kiện mờ, chúng ta sẽ cùng xem xét một hệ điều khiển mờ để điều khiển máy bơm nước tự động. Đây là ví dụ minh họa hệ thống mờ trong Giáo trình “Công nghệ tri thức và ứng dụng” của GS.TSKH Hoàng Kiếm.

Vấn đề: Điều khiển máy bơm tự động bơm nước từ giếng vào hồ. Thời gian bơm sẽ được hệ thống tự động tính toán căn cứ trên mực nước của giếng và hồ. Mô hình bài toán như hình vẽ:



Bước 1: Xác định biến ngôn ngữ

Với biến ngôn ngữ Hồ (mực nước hồ) có các tập mờ hồ đầy (H.Đầy), hồ lưng (H.Lưng) và hồ cạn (H.Cạn)

Với biến ngôn ngữ Giếng (mực nước giếng) có các tập mờ nước cao (N.Cao), nước vừa (N.Vừa) và nước ít (N.Ít)

Với biến ngôn ngữ Bơm (thời gian bơm) có các tập mờ bơm lâu (B.Lâu), bơm hơi lâu (B.Hơi Lâu) và bơm vừa (B.Vừa)

Bảng quan hệ giữa các biến ngôn ngữ:

	H.Đầy	H.Lưng	H.Cạn
N.Cao	0	B.Vừa	B.Lâu
N.Vừa	0	B.Vừa	B.Hơi Lâu
N.Ít	0	0	0

Bước 2: Xác định hàm thuộc của các biến ngôn ngữ

Hàm thuộc của Hồ nước:

Logic mờ, số mờ và hệ mờ

$$H.Đầy(x) = x/2 \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$H.Lung(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$H.Cạn(x) = 1-x/2 \quad 0 \leq x \leq 2$$

Hàm thuộc của Giếng:

$$N.Cao(y) = y/10 \quad 0 \leq y \leq 10$$

$$N.Vừa(y) = \begin{cases} y/5 & 0 \leq y \leq 5 \\ (10-y)/5 & 5 \leq y \leq 10 \end{cases}$$

$$N.Ít(y) = 1-y/10 \quad 0 \leq y \leq 10$$

Hàm thuộc của kết luận (Bơm) cho từng luật:

$$B.Vừa(z) = \begin{cases} z/15 & 0 \leq z \leq 15 \\ (30-z)/15 & 15 \leq z \leq 30 \end{cases}$$

$$B.Lâu(z) = z/30 \quad 0 \leq z \leq 30$$

$$B.HoiLâu(z) = \begin{cases} z/20 & 0 \leq z \leq 20 \\ 1-0.05(z-20) & 20 \leq z \leq 30 \end{cases}$$

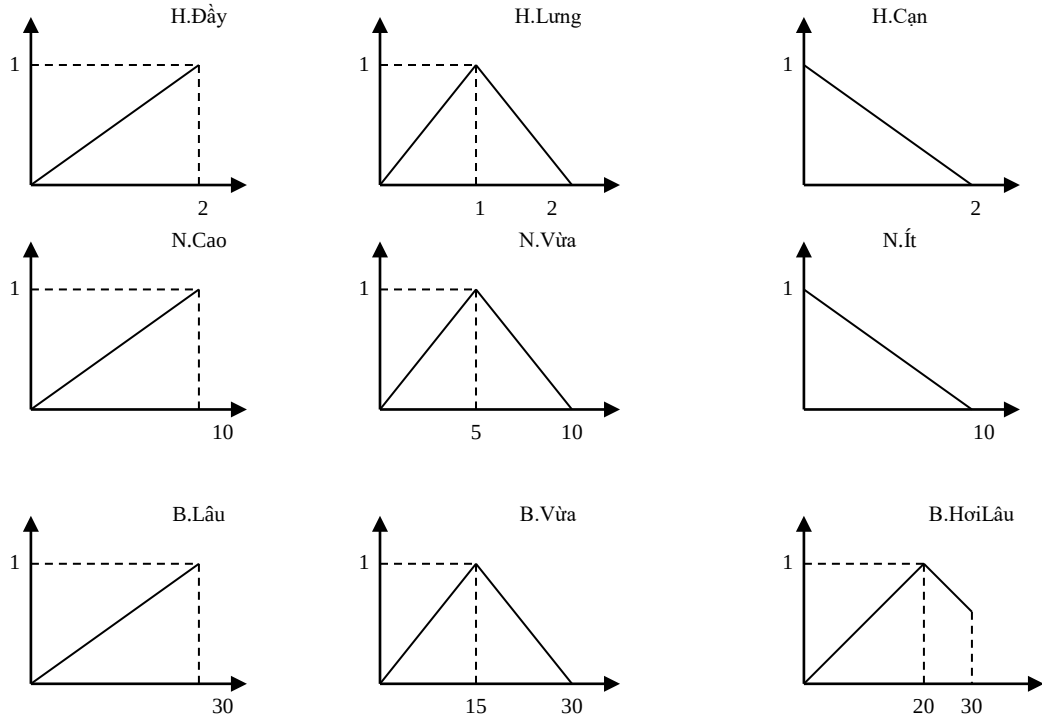
Trong đó:

x là mực nước hồ (m) ($0 \leq x \leq 2$)

y là mực nước giếng (m) ($0 \leq y \leq 10$)

z là thời gian bơm (phút) ($0 \leq z \leq 30$)

Logic mờ, số mờ và hệ mờ



Bước 3: Xác định các luật mờ

- Luật 1 (r1): if x is H.Lung and y is N.Cao then z is B.Vừa
- Luật 2 (r3): if x is H.Cạn and y is N.Cao then z is B.Lâu
- Luật 3 (r3): if x is H.Lung and y is N.Vừa then z is B.Vừa
- Luật 4 (r4): if x is H.Cạn and y is N.Vừa then z is B.HoiLâu

Bước 4: Chọn phương pháp suy diễn mờ và giải mờ

Với một cặp giá trị đầu vào (x,y) ta tính trọng số của từng luật đối với (x,y). Trọng số của luật r chính là độ thuộc của giá trị đầu vào (x,y) đối với giả thiết của r. Từ đó ta tính được giá trị đầu ra cho bởi r. Giá trị đầu ra của hệ là tổng hợp của đầu ra của tất cả các luật trong hệ. Đó chính là tập mờ đầu ra. Giải mờ ta có giá trị rõ đầu ra và đó là giá trị tín hiệu điều khiển của hệ mờ.

Ví dụ giá trị đầu vào là x=1 (mức nước hồ) và y=3 (mức nước giếng)

Tính các trọng số của các luật: ký hiệu w_i là trọng số của luật ri

$$\mu_{H.Lung}(x) = 1 \quad \text{và} \quad \mu_{N.Cao}(y) = 3/10 = 0.3 \quad \Rightarrow w_1 = \min(1, 0.3) = 0.3$$

$$\mu_{H.Cạn}(x) = 0.5 \quad \text{và} \quad \mu_{N.Cao}(y) = 3/10 = 0.3 \quad \Rightarrow w_2 = \min(0.5, 0.3) = 0.3$$

$$\mu_{H.Lung}(x) = 1 \quad \text{và} \quad \mu_{N.Vừa}(y) = 3/5 = 0.6 \quad \Rightarrow w_3 = \min(1, 0.6) = 0.6$$

$$\mu_{H.Cạn}(x) = 0.5 \quad \text{và} \quad \mu_{N.Vừa}(y) = 3/5 = 0.6 \quad \Rightarrow w_4 = \min(0.5, 0.6) = 0.5$$

Hàm thuộc của kết luận:

$$\begin{aligned} \mu_c(z) &= \sum_{i=1}^n w_i \times \mu_{K_{L_i}}(z) \\ &= w_1.B.Vừa(z) + w_2.B.Lâu(z) + w_3.B.Vừa(z) + w_4.B.HoiLâu(z) \\ &= 0.3.B.Vừa(z) + 0.3.B.Lâu(z) + 0.6.B.Vừa(z) + 0.5.B.HoiLâu(z) \\ &= 0.9.B.Vừa(z) + 0.3.B.Lâu(z) + 0.5.B.HoiLâu(z) \end{aligned}$$

Logic mờ, số mờ và hệ mờ

$$= \begin{cases} 0.9z/15 + 0.3z/30 + 0.5z/20 & 0 \leq z \leq 15 \\ 0.9(2 - z/15) + 0.3z/30 + 0.5z/20 & 15 \leq z \leq 20 \\ 0.9(2 - z/15) + 0.3z/30 + 0.5(2 - z/20) & 20 \leq z \leq 30 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0.095z & 0 \leq z \leq 15 \\ 1.8 - 0.025z & 15 \leq z \leq 20 \\ 2.8 - 0.075z & 20 \leq z \leq 30 \end{cases}$$

Giải mờ:

$$F \mu_c(z) = \begin{cases} 0.0475z^2 & 0 \leq z \leq 15 \\ 1.8z - 0.0125z^2 & 15 \leq z \leq 20 \\ 2.8z - 0.0375z^2 & 20 \leq z \leq 30 \end{cases}$$

$$z\mu_c(z) = \begin{cases} 0.095z^2 & 0 \leq z \leq 15 \\ 1.8z - 0.025z^2 & 15 \leq z \leq 20 \\ 2.8z - 0.075z^2 & 20 \leq z \leq 30 \end{cases}$$

$$F z\mu_c(z) = \begin{cases} 0.095/3z^3 & 0 \leq z \leq 15 \\ 0.9z^2 - 0.025/3z^3 & 15 \leq z \leq 20 \\ 1.4z^2 - 0.025z^3 & 20 \leq z \leq 30 \end{cases}$$

$$\int_0^{30} z\mu_c(z)dz = \int_0^{15} z\mu_c(z)dz + \int_{15}^{20} z\mu_c(z)dz + \int_{20}^{30} z\mu_c(z)dz$$

$$= \left[0.095/3z^3 \right]_0^{15} + \left[0.9z^2 - 0.025/3z^3 \right]_{15}^{20} + \left[1.4z^2 - 0.025z^3 \right]_{20}^{30}$$

$$= \mathbf{450.833}$$

$$\int_0^{30} \mu_c(z)dz = \int_0^{15} \mu_c(z)dz + \int_{15}^{20} \mu_c(z)dz + \int_{20}^{30} \mu_c(z)dz$$

$$= \left[0.0475z^2 \right]_0^{15} + \left[1.8z - 0.0125z^2 \right]_{15}^{20} + \left[2.8z - 0.0375z^2 \right]_{20}^{30}$$

$$= \mathbf{26.75}$$

Vậy defuzzy(z) = **450.833 / 26.75 = 16.8536**

Vậy với mực nước trong hồ là 1m và giếng là 3m thì cần bơm 16.845=16 phút 51 giây